ONCOURS D'ADMISSION À L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1987

CONCOURS SCIENCES ÉCONOMIQUES

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Calculatrice électronique autorisée.

I

1. On considère la fonction numérique f définie par :

$$x \longrightarrow f(x) = x - \ln |x|$$

où $|x|$ est la valeur absolue de x et ln est la fonction logarithme népérien.

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b. Calculer la dérivée f' de f. En déduire les intervalles de monotonie de la fonction f.

c. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers l'infini. En déduire une direction asymptotique à la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans ce repère, l'unité de longueur étant 2 cm.

2. On considère la suite récurrente (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$

- par son premier terme u_0 tel que $|u_0| \geqslant 1$;
- la relation $u_{n+1} = u_n - \ln |u_n|$.

a. Quelles sont les valeurs l_1 et l_2 susceptibles d'être limite de la suite (u_n) ?

b. Sur la courbe représentant la fonction f définie dans la première question, marquer les quatre points de coordonnées $[u_n, f(u_n)]$ pour les valeurs 0; 1; 2; 3 de n avec $u_0 = 4$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n) selon la valeur donnée à u_0 ($|u_0| \geqslant 1$).

II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note $x'x$ l'axe des abscisses et $y'y$ l'axe des ordonnées.

Soit D la droite d'équation $x + y - 1 = 0$. Cette droite D coupe $x'x$ en A et $y'y$ en B.

À tout point M du plan de coordonnées X et Y, on associe ses distances $d(M, x'x)$, $d(M, y'y)$ et $d(M, D)$ aux droites $x'x$, $y'y$ et D.

On rappelle :

$$d(M, x'x) = |Y|$$
$$d(M, y'y) = |X|$$
$$d(M, D) = \frac{1}{\sqrt{2}} |X + Y - 1|.$$

1. On suppose que le point M (X, Y) appartient à l'intérieur du triangle OAB ou aux côtés de ce triangle, soit :

$$\begin{cases} 0 \leqslant X \leqslant 1 \\ 0 \leqslant Y \leqslant 1 - X. \end{cases}$$

Déterminer la position M_0 de M pour laquelle la somme des distances de M aux trois côtés du triangle OAB est minimale.

2. On suppose que le point M (X, Y) appartient à l'intérieur du triangle OAB, soit :

$$\begin{cases} 0 < X < 1 \\ 0 < Y < 1 - X. \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

a. Déterminer la position M_1 du point M pour laquelle la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle est minimale.

b. Soit n un nombre entier supérieur à 2. Déterminer la position M_n du point M pour laquelle la somme des puissances d'ordre $(n + 1)$ des distances du point M aux trois côtés du triangle OAB est minimale.

Le point M_n a-t-il une position limite lorsque le nombre entier n tend vers $+\infty$?

III

1. Soit u une suite de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la *suite* u est convergente si et seulement si la *série* de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ est convergente.

2. *Applications :*

a. Montrer que la suite s définie par :

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

est convergente.

b. Montrer que la série de terme général :

$$w_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant 2$$

est convergente.

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

On remarquera que :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}.$$